NGHIÊN CỨU DÒNG THẤM KHÔNG ỔN ĐỊNH TRONG BỜ SÔNG: CÁC LỜI GIẢI GIẢI TÍCH VÀ TOÁN SỐ

Huỳnh Thanh Sơn
Trường Đại học Bách Khoa – Đại học Quốc gia Tp. Hồ Chí Minh

Tóm tắt:*Bài báo trình bày một mô hình toán về dòng thấm không ổn định trong bờ sông trong vùng chịu ảnh hưởng triều, bao gồm hai phương trình đạo hàm riêng với hai lời giải giải tích nhận được từ phương pháp phân ly biến số và phương pháp toán tử phức, cùng với hai lời giải số nhận được từ phương pháp sai phân hữu hạn ẩn. Kết quả từ các lời giải được so sánh thông qua một số ví dụ số.*
Từ khóa: *bờ sông, dòng thấm không ổn định, phương trình tuyến tính hóa, lời giải giải tích, lời giải số*

Summary:*The paper presents a mathematical model for unsteady seepage in riverbank in tidal zone including two different partial differential equations with two analytical solutions obtained by the variable separation method and the complex operator method, and two numerical solutions obtained by the implicit finite difference method. A comparison of these solutions is showed through some numerical examples.*
Keywords:*riverbank, unsteady seepage, linearized equation, analytical solution, numerical solution.*

1. GIỚI THIỆU

Xói lở bờ sông là một hiện tượng phổ biến đối với mọi con sông trên thế giới, gây ra nhiều thiệt hại về vật chất và đôi khi là nhân mạng. Có nhiều nguyên nhân gây ra xói lở bờ sông như do dòng chảy trong sông, dòng thấm trong bờ sông, sóng do gió và tàu thuyền, xây dựng công trình trên bờ sông, khai thác cát trong sông, … Bài báo này chỉ tập trung vào dòng thấm trong bờ sông, trong điều kiện mực nước sông thay đổi do bị ảnh hưởng triều như ở đồng bằng sông Cửu Long.

Trong phần tiếp theo, sau khi thiết lập phương trình đạo hàm riêng cấp hai mô tả dòng thấm không ổn định, hai cách tuyến tính hóa sẽ được trình bày để cho hai phương trình dòng thấm khác nhau. Bằng cách áp dụng các phương pháp toán thích hợp sẽ nhận được hai lời giải giải tích và hai lời giải số từ hai phương trình tuyến tính hóa nói trên. Một số ví dụ số so sánh kết quả của các lời giải sẽ được trình bày ở phần cuối của bài báo này.

Một số kết quả nghiên cứu thí nghiệm về dòng thấm sẽ được trình bày trong bài báo tiếp theo.

2. CÁC MÔ HÌNH TOÁN

2.1.Thiết lập phương trình

Theo lý thuyết nước dưới đất, đối với dòng thấm một thứ nguyên (theo phương nằm ngang x) trong một môi trường đồng chất, đẳng hướng, không biến dạng, không có rò rỉ và không có mưa bổ sung trên mặt đất, cột nước đo áp H(x,t) có thể được diễn tả bởi phương trình Boussinesq kết hợp với giả thiết Dupuit[1]:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{K}{n}.\frac{\partial}{\partial x}\left(H\frac{\partial H}{\partial x}\right) \qquad (1)$$

trong đó n (%) là độ rỗng, K (m/s) là độ dẫn suất thủy lực của môi trường.

Ngày nhận bài: 13/12/2017
Ngày thông qua phản biện: 02/02/2018
Ngày duyệt đăng: 02/3/2018

(1) có thể được viết dưới dạng:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{K}{2n} \cdot \frac{\partial^2 H^2}{\partial x^2} \qquad (2)$$

(2) là một phương trình đạo hàm riêng cấp hai phi tuyến, do đó nó cần được tuyến tính hóa trước khi giải.

Có hai cách tuyến tính hóa phương trình (2). Cách thứ nhất là thay thế cột nước H đứng riêng trong dấu ngoặc ở vế phải của (1) bằng cột nước trung bình H_m, từ đó dẫn đến phương trình tuyến tính hóa đơn giản sau đây:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{KH_m}{n} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$$

hay $\frac{\partial H}{\partial t} = E \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$ (3)

với $E = \frac{KH_m}{n}$ (4)

thường được gọi là hệ số dẫn mực nước.

Cách tuyến tính hóa thứ hai được thực hiện bằng cách thay thế:

$$U(x,t) = H^2(x,t) \qquad (5)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (5) theo t, nhận được:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 2H \frac{\partial H}{\partial t} \qquad (6)$$

(6) được tuyến tính hóa bằng cách thay H đứng riêng bên vế phải bằng H_m, từ đó:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{2H_m} \cdot \frac{\partial U}{\partial t} \qquad (7)$$

Thay (5) và (7) vào (2), nhận được:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = E \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad (8)$$

Trong thực tế, bờ sông có thể nghiêng hoặc thẳng đứng. Tuy nhiên để giảm bớt mức độ phức tạp của lời giải giải tích, ở đây chỉ xét trường hợp mái thẳng đứng. Nếu bờ sông nghiêng không nhiều thì có thể lấy gần đúng như bờ có mái thẳng đứng trung bình.

Trong phần sau, bốn lời giải giải tích và toán số từ hai phương trình (3) và (8) sẽ được trình bày.

2.2.Lời giải giải tích và toán số của phương trình (3)

Phương trình (3) được giải với các điều kiện biên sau đây:

(i) Tại biên bờ sông(x = 0), điều kiện biên là mực nước sông được giả sử thay đổi theo hàm sin với chu kỳ T_o, tần số góc$\omega = 2\pi/T_o$và nửa biên độ $\hat{H}$:

$$H(0,t) = H_m + \hat{H}\sin(\omega t - \varphi) \qquad (9a)$$

trong đó $H_m$là chiều sâu trung bình,φđộ lệch pha (để hiệu chỉnh hàm H(0,t) gần với mực nước sông đo được, nếu cần thiết).

(ii) Tại biên xa bờ sôngtrong khối đất ($x \to +\infty$), nơi dòng thấm không còn bị ảnh hưởng bởi mực nước sông, cột nước thấm có giá trị không đổi:

$$H(\infty,t) = H_m \qquad (9b)$$

2.2.1 Lời giải giải tích của phương trình (3)

Phương trình (3) có dạng phương trình truyền nhiệt trong đó hệ số truyền nhiệt chính là hệ dẫn mực nước E.

Lời giải tổng quát của (3) được tìm thấy nhờ dùng phương pháp phân ly biến số [2], bằng cách đặt:

$$H(x,t) = X(x).T(t) \qquad (10)$$

trong đó X và Tlà hai hàm số một biến có dạng:

$$T(t) = e^{-i\omega t} \qquad (11a)$$

$$X(x) = X_o e^{-i\delta x} \qquad (11b)$$

với $X_o$vàδlà hai thông số cần được xác định và i là số phức với$i^2 = -1$.

Lấy đạo hàm bậc hai theo x và đạo hàm bậc nhất theo t của (10) thì được:

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial x^2} = X''.T \quad \text{và} \quad \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = X.T'$$

trong đó X''(x) là đạo hàm bậc hai X (x) và T'(t) là đạo hàm bậc nhất của T(t).

Từ (11a) và (11b) ta có:

$$X'' = -\delta^2 X \quad \text{and} \quad T' = -i\omega \boldsymbol{T}$$

Thay các biểu thức này vào (3) và sau khi đơn giản, nhận được:

$$\delta^2 = i\omega / C$$

Từ đó:

$$\delta = \pm(1+i)\sqrt{\omega / 2C} = \pm(1+i)\boldsymbol{r} \qquad (12)$$

với $r = \sqrt{\omega / 2C}$ (13)

(11b) trở thành:

$$X(x) = X_o e^{-i[\pm(1+i)r]x} = X_o e^{\pm[(1-i)r]x}$$

hay: $X(x) = X_o e^{\pm rx} e^{mirx}$ (14)

Thay (14) và (11a) vào (10):

$$H(x,t) = e^{-i\omega t}.X_o e^{\pm rx} e^{mirx}$$

hay: $H(x,t) = X_o e^{\pm rx} e^{-i[\omega t \pm \boldsymbol{r}x]}$ (15)

Với $e^{-i\theta} = cos\theta - isin\theta$, (15) trở thành:

$$H(x,t) = X_o e^{\pm rx}\left[cos(\omega t \pm rx) - isin(\omega t \pm rx)\right] \qquad (16)$$

Từ (16) ta có hai lời giải của phương trình (3), tuy nhiên lời giải tương ứng với trường hợp H(x,t) tăng với x (nghĩa là trường hợp ứng với e^{+rx}) sẽ bị loại. Cuối cùng, ta nhận được lời giải giải tích của phương trình (3) tương ứng với phần ảo trong (16) kết hợp với các điều kiện biên (i) và (ii) ở trên:

$$H(x,t) = H_m + \hat{H}\exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2E}}x\right).\sin\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2E}}x - \varphi\right) \qquad (17)$$

2.2.2 Lời giải số của phương trình (3)

Phương trình(3) có thể được giải dùng phương pháp sai phân hữu hạn với sơ đồ hoàn toàn ẩn (sai phân tiến theo thời gian và sai phân trung tâm theo không gian). Biểu thức sai phân tại nút i vào thời điểm (n + 1) được viết như sau:

$$\frac{H_i^{n+1} - H_i^n}{\Delta t} = E\frac{H_{i-1}^{n+1} - 2H_i^{n+1} + H_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \qquad (18)$$

Sau khi sắp xếp lại, nhận được phương trình đại số có dạng:

$$A_i H_{i-1}^{n+1} + B_i H_i^{n+1} + C_i H_{i+1}^{n+1} = D_i \qquad (19)$$

trong đó:

$$A_i = -\gamma, \quad B_i = 1 + 2\gamma, \quad C_i = -\gamma,$$
$$D_i = H_i^n \quad \text{với} \quad \gamma = E\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \qquad (20)$$

Kết hợp với các điều kiện H(0,t) đo được tại bờ sông và H(L,t) đo được ở cách xa bờ sông, ta sẽ có một hệ phương trình đại số dưới dạng ma trận $\mathcal{A}\mathcal{X} = \mathcal{B}$, trong đó $\mathcal{A}$ là ma trận 3 đường chéo với đường chéo chính chiếm ưu thế, $\mathcal{X}$ là vec-tơ cột chứa các giá trị chưa biết H_i cần xác định ở thời điểm mới (n + 1), $\mathcal{B}$ là vec-tơ cột chứa các giá trị của H_i đã biết ở thời điểm cũ n. Hệ phương trình đại số này có thể giải dễ dàng nhờ thuật toán Thomas dành cho ma trận 3 đường chéo [3].

2.3 Lời giải giải tích và toán số của phương trình (8)

Phương trình (8) được giải với hai điều kiện biên sau đây:

(i) Tại biên bờ sông (x = 0), điều kiện biên là mực nước sông được giả sử thay đổi theo dạng hình sin với chu kỳ T_o:

$$H(0,t) = H_m + \hat{H}\sin(\omega t - \varphi) \qquad (9a)$$

Từ đó: $U(0,t) = H^2 = \left[H_m + \hat{H}\sin(\omega t - \varphi)\right]^2$

$$= H_m^2 + 2H_m\hat{H}\sin(\omega t - \varphi) + \hat{H}^2\sin^2(\omega t - \varphi)$$

$$= H_m^2 + 2H_m\hat{H}\sin(\omega t - \varphi) + \hat{H}^2\left[\frac{1-\cos 2(\omega t - \varphi)}{2}\right]$$

$$= H_m^2 + \frac{\hat{H}^2}{2} + 2H_m\hat{H}\sin(\omega t - \varphi) - \frac{\hat{H}^2\cos 2(\omega t - \varphi)}{2} \quad (21)$$

(ii) Ở cách xa bờ sông trong khối đất ($x \to +\infty$), dòng thấm không còn bị ảnh hưởng bởi mực nước sông, cốt nước thấm có giá trị không đổi:

$$U(\infty,t) = H_m^2 + \frac{\hat{H}^2}{2} \quad (22)$$

Trong thực tế, khoảng cách xa vô hạntrên lý thuyết ($x \to +\infty$)thường được thay thế bằng khoảng cách hữu hạn x = L, trong đó L là khoảng cách đủ xa để không còn bị ảnh hưởng bởi mực nước sông (theo kinh nghiệm thì L ≅ 20 m ở đồng bằng sông Cửu Long).

Đối với điều kiện ban đầu (t = 0) của bài toán, thường giả sử rằng $U(x,0) = H_m^2 + \frac{\hat{H}^2}{2}$ (23)

2.3.1Lời giải giải tích của phương trình (8)

Để giải phương trình (8) với điều kiện ban đầu (23), điều kiện biên (22) và nhất là với điều kiện biên phức tạp (21), phương pháp toán tử phức (complex operator method) sẽ được áp dụng.

Nội dung của phương pháp này được tóm tắt như sau [2]: trước hết bài toán thực,ký hiệu T, sẽ được biến đổi thành một bài toán phức có dạng (W) = (T) + i(S), trong đó (S) là phần ảo và i là số phức với $i^2 = -1$. Lời giải của bài toán phức sẽ nhận được nhờ phương pháp phân ly biến số có dạng $W(x, t) = X(x).e^{i\omega t}$, sau đó T sẽ được xác định như là phần thực của lời giải phức: T(x,t) = Re[W(x,t)].

Do điều kiện biên (21) chứa hai hàm tuần hoàn sin(ωt-φ) và cos[2(ωt-φ)] nên lời giải thực T sẽ được tìm bằng cách đặt:

$$T = -U + H_m^2 + \frac{\hat{H}^2}{2} = T_1 + T_2 \quad (24)$$

trong đó T_1và T_2sẽ được xác định nhờ hai lần áp dụng phương pháp phân ly biến số.

Sau nhiều tính toán giải tích phức tạp, tìm được:

$$T_1(x,t) = -2H_m\hat{H}\,.\,e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2E}}}.\sin\left(\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{2E}} - \varphi\right)$$

$$T_2(x,t) = \frac{\hat{H}^2}{2}.\,e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{E}}}.\cos\left(2\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{E}} - 2\varphi\right)$$

Từ (24), nhận được lời giải cuối cùng $U(x,t) = H_m^2 + \frac{\hat{H}^2}{2} - T_1 - T_2$:

$$U(x,t) = H_m^2 + \frac{\hat{H}^2}{2} + 2H_m\hat{H}\,.\,e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2E}}}.\sin\left(\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{2E}} - \varphi\right) - \frac{\hat{H}^2}{2}.\,e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{E}}}.\cos\left(2\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{E}} - 2\varphi\right) \quad (25)$$

2.3.2Lời giải số của phương trình (8)

Phương trình (8) có thể được giải số nhờ áp dụng phương pháp sai phân hữu hạn với sơ đồ ẩn như đã trình bày ở mục 2.2.2. Biểu thức sai phân tại nút i vào thời điểm (n + 1) được viết như sau:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = E\frac{U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \quad (26)$$

Sau khi sắp xếp lại, nhận được biểu thức đại số sau:

$$A_i U_{i-1}^{n+1} + B_i U_i^{n+1} + C_i U_{i+1}^{n+1} = D_i \qquad (27)$$

với: $A_i = -\gamma$, $B_i = 1 + 2\gamma$, $C_i = -\gamma$, $D_i = U_i^n$ với $\gamma = E\dfrac{\Delta t}{\Delta x^2}$ (28)

Kết hợp với các điều kiện biên U(0,t) đo được tại bờ sông và U(L,t) đo được ở cách xa bờ sông, ta sẽ có một hệ phương trình đại số dưới dạng ma trận $\mathcal{AX} = \mathcal{B}$ như đã trình bày trong mục 2.2.2. Sau khi tìm được các giá trị của U_i, các giá trị tương ứng của H_i sẽ được xác định theo (5).

1. SO SÁNH CÁC LỜI GIẢI GIẢI TÍCH VÀ TOÁN SỐ

Bảng 1 trình bày tóm tắt 4 lời giải đã tìm thấy ở trên để tiện so sánh.

Bảng 1.Tóm tắt các lời giải đã tìm được

1	$H(x,t) = H_m + \hat{H}\exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2E}}x\right).\sin\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2E}}x - \varphi\right)$ (Lời giải giải tích của (3))
2	$U(x,t) = H_m^2 + \frac{\hat{H}^2}{2} + 2H_m\hat{H}.e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2E}}}.\sin(\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{2E}} - \varphi) - \frac{\hat{H}^2}{2}.e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{E}}}.\cos(2\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{E}} - 2\varphi)$ (Lời giải giải tích của (8))
3	$A_i H_{i-1}^{n+1} + B_i H_i^{n+1} + C_i H_{i+1}^{n+1} = D_i$, $A_i = -\gamma$, $B_i = 1 + 2\gamma$, $C_i = -\gamma$, $D_i = H_i^n$, $\gamma = E.\Delta t / \Delta x^2$ (Lời giải số của (3))
4	$A_i U_{i-1}^{n+1} + B_i U_i^{n+1} + C_i U_{i+1}^{n+1} = D_i$, $A_i = -\gamma$, $B_i = 1 + 2\gamma$, $C_i = -\gamma$, $D_i = U_i^n$ (Lời giải số của (8))

Để xem xét sự khác biệt giữa 4 lời giải, một số ví dụ số đã được thực hiện với các thông số sau đây:

H_m = 10 m;K = 2.10^{-5} m/s; n = 0,35 ;

T_o = 24 h; $\varphi = 0$

$\hat{H}$= 0,5 m; 1,0 m and 1,5 m

Các hình 1, 2 và 3 trình bày việc so sánh các kết quả.

Có thể thấy rằng sự khác biệt giữa 4 lời giải nhỏ và gia tăng khi biên độ triều tăng. Trong các ví dụ trên, khi $\hat{H}$ = 1,5 m (giá trị lớn nhất của nửa biên độ triều tại TP. HCM và ở đồng bằng sông Cửu Long), sự khác biệt lớn nhất của cột nước H chỉ vào khoảng 0,1 m. So với chiều sâu nước trung bình H_m = 10 m, sự khác biệt này chỉ bằng khoảng 1%, một con số có thể bỏ qua khi tính toán dòng thấm trong bờ sông.

4. KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Một khảo sát chi tiết về dòng thấm không ổn định trong bờ sông khi mực nước sông thay đổi đã được thực hiện. Ví dụ số cho thấy có thể bỏ qua sự khác biệt của các lời giải. Trong thực tế, có thể chọn lời giải giải tích và lời giải số ứng với phương trình (3) để sử dụng vì sự đơn giản của chúng. Ngoài ra, do có thể áp dụng trực tiếp số liệu đo đạc mực nước sông tại biên sông (x = 0) vào mô hình toán số nên kết quả tính cột nước thấm H trong bờ sông sẽ phù hợp hơn là dùng lời giải giải tích do bị hạn chế điều kiện biên tại x = 0 phải là một hàm tuần hoàn thuần túy.

Trong tương lai, bài toán sẽ được mở rộng cho trường hợp bờ sông mái nghiêng với sự phức tạp hơn về mặt toán học nhưng cũng phù hợp hơn trong thực tế.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Bear J. (1979),Hydraulics of groundwater. Mc Graw-Hill Book Co., USA.

[2] James G. (1993), Advanced modern engineering mathematics. Addison-Wesley Publising Co., England.

[3] Vreugdenhil C. B. (1989),Computational hydraulics. Springer-Verlag, Germany.