# XÂY DỰNG MÔ HÌNH TOÁN HỌC VỀ DÒNG CHẢY HỞ HAI CHIỀU ĐỨNG BẰNG TIẾP CẬN ĐỐI NGẪU

**Nguyễn Thế Hùng**
*Đại học Đà Nẵng*

**Tóm tắt:** *Mô hình toán học dòng chảy hở hai chiều đứng hiện nay được xây dựng bằng phương pháp trung bình cổ điển, được tích phân từ bờ phải đến bờ trái của con sông từ phương trình Navier-Stockes ba chiều trung bình theo Reynolds; các đại lượng trung bình nhận được theo cách tiếp cận cổ điển này không tổng quát so với cách tiếp cận đối ngẫu. Bài báo này giới thiệu cách tiếp cận đối ngẫu để thiết lập phương trình dòng chảy hở hai chiều đứng; cách xây dựng mô hình này sẽ phức tạp hơn cách xây dựng cổ điển, tích phân có thể được thực hiện nhiều lần. Trong bài báo này, tác giả thực hiện hai lần: (i) lần đầu, tích phân từ bờ sông phải đến mặt phẳng thẳng đứng nằm trong khoảng bờ sông phải và bờ sông trái, và tiếp theo (ii) lần thứ hai, tích phân từ bờ sông phải đến bờ sông trái.*
*Mô hình dòng chảy hở hai chiều đứng cải tiến nhận được từ cách tiếp cận đối ngẫu này cho phép nhận được các tham số dòng chảy chính xác hơn phương pháp cổ điển. Mặt khác, nó cung cấp thêm một số tham số để điều chỉnh kết quả tính toán dựa theo số liệu đo đạc từ thực tế hoặc thí nghiệm.*
**Từ khóa:** *Phương pháp trung bình cổ điển, tiếp cận đối ngẫu, dòng chảy hai chiều đứng, các đại lượng trung bình.*

**Summary:** *The mathematical model of two-dimensional vertical flow, in currently, is constructed by the classic average method which is integrated from the right to the left river bank of the three-dimensional Reynolds averaged Navier-Stokes equations; the average quantities received by this approach do not generalize by means of dual approach. This paper presents a dual approach to establish the two-dimensional vertical flow equations; the setup model will more complex than classic approach, the integral can be performed locally several times. In this paper, the Author performed twice integrals: (i) the first, integration from the right river bank to the intermediate vertical surface layer between the right bank and the left bank, and then (ii) the second, integration from the right bank to the left bank.*
*The improved two-dimensional vertical flow model received from this dual approach allows the calculation of flow parameters is more accurate than the classical method. In other words, it provides some flexible parameters to adjust based on the field or experimental data.*
**Keywords:** *Classic average method, dual approach, two-dimensional vertical flow, average quantities.*

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Dòng chảy trong thiên nhiên thường là ba chiều, tuy nhiên có những trường hợp có thể xem như dòng chảy hai chiều đứng (chẳng hạn như các bài toán dòng chảy qua đập tràn, dòng chảy ở vịnh sâu và hẹp, dòng chảy trong sông hẹp và sâu có chiều rộng sông ít thay đổi…). Dòng chảy ba chiều được mô tả theo phương trình Navier - Stocks ba chiều (3D), tuy nhiên việc giải trực tiếp từ phương trình 3D gặp rất nhiều khó khăn về mặt toán số, thời gian tính toán lâu và thiếu số liệu thực đo để kiểm chứng. Nhằm đơn giản hóa bài toán, mà trong một số trường hợp thực tế vẫn đảm bảo được yêu cầu kỹ thuật, mô hình toán thường đưa về các dạng đơn giản hơn như một chiều (1D), hai chiều ngang (2DH), hai chiều đứng (2DV) (NGUYEN The Hung 1992; Hung NGUYEN The 2017; Tinh Ton That et al., 2019; Hung NGUYEN The 2020; Weiming Wu 2007).

Với mô hình dòng chảy 2DV, vận tốc dòng chảy theo phương ngang oy được bỏ qua ($v \approx 0$); các vận tốc $(u,w)$ theo các phương $(ox,oz)$ được lấy trung bình theo cả chiều rộng sông. Để nhận được mô hình toán dòng chảy 2DV, hiện nay

Ngày nhận bài: 02/9/2021
Ngày thông qua phản biện: 29/12/2022
Ngày duyệt đăng: 21/02/2022

người ta đi tích phân hệ phương trình 3D Navier-Stocks một lần theo chiều rộng sông; đi tích phân từ bờ sông phải đến bờ sông trái (gọi là tích phân tổng thể). Trong bài báo này, tác giả đi xây dựng mô hình 2DV từ hệ phương trình 3D Navier-Stocks được trung bình theo Reynolds theo cách tiếp cận đối ngẫu.

Theo cách tiếp cận đối ngẫu, các đại lượng vật lý được tích phân nhiều lần, có cả tích phân cục bộ và tổng thể (Nguyen Dong Anh, 2012), trong bài báo này chỉ tích phân hai lần. (i) Đầu tiên (tích phân lần 1, hay còn gọi tích phân cục bộ), tích phân từ bờ sông phải A đến mặt thẳng đứng trung gian nằm giữa bờ sông phải và bờ sông trái; (ii) tiếp theo (tích phân lần 2, gọi là tích phân tổng thể), tích phân lần nữa từ bờ sông phải đến bờ sông trái, ta sẽ nhận được hệ phương trình vi phân của bài toán 2DV theo cách tiếp cận đối ngẫu. Với cách tiếp cận này sẽ phức tạp hơn cách tiếp cận cổ điển nhưng bù lại ta sẽ thu được các đại lượng vật lý trong dòng chảy tốt hơn cách tiếp cận theo phương pháp cổ điển.

## 2. TIẾP CẬN ĐỐI NGẪU TRONG XÂY DỰNG PHƯƠNG TRÌNH DÒNG CHẢY 2DV

Từ phương trình Navier-Stockes 3D trung bình hóa theo Reynolds như sau:

- Phương trình liên tục:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad (1)$$

- Các phương trình động lượng tương ứng theo các phương x, y và z:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial(u.u)}{\partial x}+\frac{\partial(u.v)}{\partial y}+\frac{\partial(u.w)}{\partial z}=$$
$$\frac{1}{\rho}.F_x-\frac{1}{\rho}.\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \qquad (2)$$

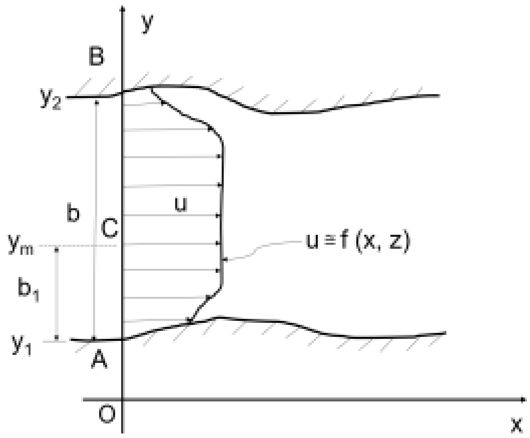
$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial(u.v)}{\partial x}+\frac{\partial(v.v)}{\partial y}+\frac{\partial(v.w)}{\partial z}=$$
$$\frac{1}{\rho}.F_y-\frac{1}{\rho}.\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial(u.w)}{\partial x}+\frac{\partial(v.w)}{\partial y}+\frac{\partial(w.w)}{\partial z}=$$
$$\frac{1}{\rho}.F_z-\frac{1}{\rho}.\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \qquad (4)$$

Trong đó: u, v, w là thành phần vận tốc theo phương x, y và z; $F_x$, $F_y$, $F_z$ là các thành phần của lực khối $\vec{F}=\rho\vec{g}$ tương ứng theo các phương x, y và z; p là thành phần áp suất trung bình; $\tau_{xx}$,$\tau_{yy}$, $\tau_{zz}$, $\tau_{xy}$, $\tau_{xz}$, $\tau_{yx}$, $\tau_{yz}$, $\tau_{zx}$, $\tau_{zy}$ là các thành phần ứng suất theo các trục x, y, z và theo các mặt phẳng x-y, x-z, y-z; ρ là khối lượng riêng của nước.

Trong những điều kiện nhất định, ta có thể xây dựng mô hình dòng chảy theo 2DV bằng cách tích phân hệ phương trình (1), (2), (3), (4) (Weiming Wu, 2007).

Với bài toán 2DV thì số hạng trong phương trình trung bình Reynolds theo phương y rất nhỏ và phương trình (3) biến mất.




*Hình 1: Sơ đồ xây dựng dòng chảy 2DV bằng tiếp cận đối ngẫu*

***Xây dựng mô hình toán dòng chảy 2DV từ mô hình toán dòng chảy 3D theo tiếp cận đối ngẫu:***

+ Hiện nay để xây dựng mô hình toán 2DV người ta chỉ tích phân một lần (gọi là tích phân tổng thể) hệ phương trình 3D theo phương ngang (trục oy) từ bờ sông phải A(x,z) đến bờ sông trái B(x,z).

+ Theo cách tiếp cận đối ngẫu (Nguyen Dong Anh, 2012), bài toán 2DV có thể được tích phân nhiều lần, trong bài báo này tác giả chỉ tích phân

2 lần; (i) lần 1 (gọi là tích phân cục bộ): tích phân từ bờ sông phải A(x,z,t) đến mặt phẳng thẳng đứng bất kỳ C(x,z,t) nằm giữa bờ sông phải A(x,z,t) và bờ sông trái B(x,z,t); (ii) lần 2 (gọi là tích phân tổng thể): tích phân từ bờ sông phải A(x,z,t) đến bờ sông trái B(x,z,t).

- Điều kiện biên của bài toán:

• Điều kiện tại mặt phẳng bất kỳ C(x,z,t) tại vị trí $y_m$ nằm trong khoảng bờ sông phải A và bờ sông trái B (v≈0):

$$-\left[u.\frac{\partial y}{\partial x}+\mathrm{w}.\frac{\partial y}{\partial z}\right]\Big|_{y=y_m}=-\left[\overline{U}.\frac{\partial y}{\partial x}+\overline{\mathrm{W}}.\frac{\partial y}{\partial z}\right]=\frac{\partial y}{\partial t}\Big|_{y=y_m} \quad (5)$$

Trong đó: $\overline{U},\overline{\mathrm{W}}$ là vận tốc trung bình tương ứng theo phương x, z.

**2.1. Xây dựng phương trình liên tục 2DV theo tiếp cận đối ngẫu**

Từ phương trình liên tục:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{I_c}+\underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{J_c}+\underbrace{\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}}_{K_c}=0 \quad (6)$$

Tích phân lần thứ nhất (tích phân cục bộ) phương trình liên tục (1) từ bờ sông phải A(x,y=$y_1$,z,t) đến mặt thẳng đứng C(x,y=$y_m$,z,t) bất kỳ nằm trong khoảng bờ sông bên phải A và bờ sông bên trái B:

$$T[CQ]=\int_{y_1}^{y_m}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}\right).dy=0 \quad (7)$$

$$T[CQ]=\int_{y_1}^{y_m}\frac{\partial u}{\partial x}.dy+v(y_m)-v(y_1)+\int_{y_1}^{y_m}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}.dy=0$$

Mà: $v(y_m)=v(y_1)\cong 0$, nên ta có:

$$T[CQ]=\int_{y_1}^{y_m}\frac{\partial u}{\partial x}.dy+\int_{y_1}^{y_m}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}.dy=TI_c+TK_c=0 \quad (8)$$

Đi tính từng tích phân với sử dụng qui tắc Leibnitz:

$$TI_c=\int_{y_1}^{y_m}\frac{\partial u}{\partial x}.dy=\beta_{1c}.\frac{\partial}{\partial x}(\overline{u}.b_1)-\beta_{2c}.\overline{u}\frac{\partial}{\partial x}(y_m)+\beta_{2c}.\overline{u}\frac{\partial}{\partial x}(y_1) \quad (9)$$

$$TK_c=\int_{y_1}^{y_m}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}.dy=\delta_{1c}.\frac{\partial}{\partial z}(\overline{\mathrm{w}}.b_1)-\delta_{2c}.\overline{\mathrm{w}}\frac{\partial}{\partial z}(y_m)+\delta_{2c}.\overline{\mathrm{w}}\frac{\partial}{\partial z}(y_1) \quad (10)$$

Cộng hai biểu thức (9) và (10) và tính đến điều kiện biên (5), ta có:

$$T[CQ]=TI_c+TK_c=\beta_{1c}.\frac{\partial}{\partial x}(\overline{u}.b_1)+\delta_{1c}.\frac{\partial}{\partial z}(\overline{\mathrm{w}}.b_1)+\beta_{*}.\frac{\partial b_1}{\partial t}=0 \quad (11)$$

Phương trình (11) chính là phương trình liên tục của bài toán 2DV cổ điển.

Trong đó: $b_1=y_m-y_1$ là khoảng cách theo phương oy từ bờ sông phải A đến mặt phẳng phẳng thẳng đứng qua C(x,z,t) *tại* $y=y_m$.

Với các hệ số hiệu chỉnh ở phương trình liên tục như sau:

$$\beta_{1c}=\frac{1}{\frac{\partial}{\partial x}(\overline{u}.b_1)}.\frac{\partial}{\partial x}\int_{Y_1}^{Y_m}u\,dy\ ;\ \beta_{2c}=\frac{1}{\overline{u}.\frac{\partial}{\partial x}(b_1)}.\int_{Y_1}^{Y_m}u\frac{\partial}{\partial x}(dy)$$

$$\delta_{1c}=\frac{1}{\frac{\partial}{\partial z}(\overline{\mathrm{w}}.b_1)}.\frac{\partial}{\partial z}\int_{Y_1}^{Y_m}\mathrm{w}\,dy\ ;\ \delta_{2c}=\frac{1}{\overline{\mathrm{w}}.\frac{\partial}{\partial z}(b_1)}.\int_{Y_1}^{Y_m}\mathrm{w}.\frac{\partial}{\partial z}(dy)$$

$$\gamma_{2c}=(\beta_{2c}+\delta_{2c})/2 \quad (12)$$

Tích phân lần hai (tích phân tổng thể) phương trình liên tục (1) từ bờ sông phải A đến bờ sông trái B:

$$T^2[CQ]:\int_{y_1}^{y_2}\left(\beta_{1c}.\frac{\partial}{\partial x}(\overline{u}.b_1)+\delta_{1c}.\frac{\partial}{\partial z}(\overline{\mathrm{w}}.b_1)+\beta_{*}.\frac{\partial b_1}{\partial t}\right)dy=0 \quad (13)$$

Ta đi tính từng số hạng:

$$\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial b_1}{\partial t}dy=\frac{1}{2}.\frac{\partial}{\partial t}\left(y_2^2-y_1^2\right)+\frac{1}{2}.\frac{\partial}{\partial t}\left(y_1^2\right)-\frac{1}{2}.\frac{\partial}{\partial t}\left(y_2^2\right)=0$$

$$\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial}{\partial x}(\overline{u}.b_1)dy=\frac{1}{2}(y_2+y_1).\left[\frac{\partial}{\partial x}(\overline{u}.b)-\overline{u}.\frac{\partial}{\partial x}(b)\right]=$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\overline{u}.\left(y_2^2-y_1^2\right)\right]-\frac{1}{2}\overline{u}.\frac{\partial}{\partial x}\left(y_2^2-y_1^2\right)$$

$$\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial}{\partial z}(\overline{\mathrm{w}}.b_1)dy=\frac{1}{2}(y_2+y_1).\left[\frac{\partial}{\partial z}(\overline{\mathrm{w}}.b)-\overline{\mathrm{w}}.\frac{\partial}{\partial z}(b)\right]=$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left[\overline{\mathrm{w}}.\left(y_2^2-y_1^2\right)\right]-\frac{1}{2}\overline{\mathrm{w}}.\frac{\partial}{\partial z}\left(y_2^2-y_1^2\right)$$

Như vậy ta được phương trình liên tục của bài toán 2DV thiết lập theo cách tiếp cận đối ngẫu:

$$T^2[CQ]:\ \beta_{1c}\frac{\partial}{\partial x}\left[\overline{u}.\left(y_2^2-y_1^2\right)\right]-\beta_{1c}\overline{u}.\frac{\partial}{\partial x}\left(y_2^2-y_1^2\right)+$$
$$\delta_{1c}\frac{\partial}{\partial z}\left[\overline{\mathrm{w}}.\left(y_2^2-y_1^2\right)\right]-\delta_{1c}\overline{\mathrm{w}}.\frac{\partial}{\partial z}\left(y_2^2-y_1^2\right)=0 \quad (14a)$$

Nếu chọn gốc toạ độ của trục oy tại bờ sông phải A ($y_1$=0,$y_2$=b), ta có:

$$\beta_{1c}\frac{\partial}{\partial x}\left[\bar{u}.b^2\right]+\delta_{1c}\frac{\partial}{\partial z}\left[\bar{\mathrm{w}}.b^2\right]+\gamma_{1c}.\frac{\partial}{\partial t}\left(b^2\right)=0 \qquad (14b)$$

Với: $\gamma_{1c}=(\beta_{1c}+\delta_{1c})/2$

Khi b = const theo phương x và z, thì từ phương trình (14b) ta trở về phương trình liên tục cổ điển của bài toán 2DV:

$$\beta_{1c}.\frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}.b)+\delta_{1c}.\frac{\partial}{\partial z}(\bar{\mathrm{w}}.b)=0 \qquad (14c)$$

Trong đó: b là chiều rộng sông $\bar{u}$ ; $\bar{\mathrm{w}}$ là vận tốc theo trục ox, oz được lấy trung bình theo chiều rộng lòng sông b. Các hệ số $\beta_{1c}$, $\delta_{1c}$ là các hệ số hiệu chỉnh có giá trị gần bằng 1 ($\beta_{1c} \approx \delta_{1c} \approx 1$); trong những điều kiện lý tưởng như khi vận tốc u phân bố đều theo chiều rộng sông b, vận tốc w phân bố đều theo chiều sâu z thì các hệ số này bằng 1 ($\beta_{1c} = \delta_{1c} = 1$).

### 2.2. Xây dựng phương trình động lượng 2DV trung bình theo cách tiếp cận đối ngẫu theo phương x

***Tích phân phương trình (2) lần thứ nhất từ bờ sông phải A đến mặt phẳng thẳng đứng bất kỳ C(x,y=y<sub></sub>m,z,t) nằm trong phạm vi từ bờ sông phải A và bờ sông trái B:***

$$T[\mathrm{MEx}]:\int_{y_1}^{y_m}\left(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{I_x}+\underbrace{\frac{\partial(u.u)}{\partial x}}_{Jx}+\underbrace{\frac{\partial(u.v)}{\partial y}}_{K_x}+\underbrace{\frac{\partial(u.\mathrm{w})}{\partial z}}_{L_x}\right).dy=$$

$$\int_{y_1}^{y_m}\left(\underbrace{\frac{1}{\rho}.F_x}_{M_x}-\underbrace{\frac{1}{\rho}.\frac{\partial p}{\partial x}}_{N_x}+\underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}}_{F_{rx}}\right).dy \qquad (15)$$

Ta đi tính tích phân từng số hạng:

$$T[\mathrm{Ix}]=\int_{y_1}^{y_m}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right).dy=\frac{\partial}{\partial t}\int_{y_1}^{y_m}u\,dy-\int_{y_1}^{y_m}u\frac{\partial}{\partial t}(dy)$$

$$T[\mathrm{Ix}]=\alpha_{1tx}\frac{\partial}{\partial t}(\bar{u}_1.b_1)-\alpha_{2tx}\bar{u}_1\left[\frac{\partial y_m}{\partial t}-\frac{\partial y_1}{\partial t}\right]$$

$$T[\mathrm{Jx}]=\int_{y_1}^{y_m}\frac{\partial(uu)}{\partial x}.dy=\frac{\partial}{\partial x}\int_{y_1}^{y_m}(uu).dy-\int_{y_1}^{y_m}(uu).\frac{\partial}{\partial x}(dy)$$

$$T[\mathrm{Jx}]=\beta_{1x}\frac{\partial}{\partial x}(\overline{uu}.b_1)-\beta_{2x}(\overline{uu}).\frac{\partial}{\partial x}(y_m)+\beta_{2x}(\overline{uu}).\frac{\partial}{\partial x}(y_1)$$

$T[\mathrm{Kx}]=0$

$$T[\mathrm{Lx}]=\int_{y_1}^{y_m}\frac{\partial(u\mathrm{w})}{\partial z}.dy=\frac{\partial}{\partial z}\int_{y_1}^{y_m}(u\mathrm{w}).dy-\int_{y_1}^{y_m}(u\mathrm{w}).\frac{\partial}{\partial z}(dy)$$

$$T[\mathrm{Lx}]=\delta_{1x}\frac{\partial}{\partial z}(\overline{u\mathrm{w}}.b_1)-\delta_{2x}(\overline{u\mathrm{w}}).\frac{\partial}{\partial z}(y_m)+\delta_{2x}(\overline{u\mathrm{w}}).\frac{\partial}{\partial z}(y_1)$$

$$T[\mathrm{Mx}]=\int_{y_1}^{y_m}\frac{1}{\rho}.F_x.dy=\frac{1}{\rho}.F_x.(y_m-y_1)=\frac{1}{\rho}.F_x.b_1$$

$$T[\mathrm{Nx}]=\int_{y_1}^{y_m}\frac{1}{\rho}.\frac{\partial p}{\partial x}.dy=\frac{1}{\rho}.\frac{\partial p}{\partial x}.(y_m-y_1)=\frac{1}{\rho}.\frac{\partial p}{\partial x}.b_1$$

$$T[Frx]=\int_{y_1}^{y_m}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\right).dy$$

$$=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(b_1.\tau_{xx})+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}(b_1.\tau_{xz})-$$

$$\frac{1}{\rho}\left[\tau_{xx}.\frac{\partial y_m}{\partial x}+\tau_{xz}.\frac{\partial y_m}{\partial z}\right]+\frac{1}{\rho}\left[\tau_{xx}.\frac{\partial y_1}{\partial x}+\tau_{xz}.\frac{\partial y_1}{\partial z}\right]$$

$$T[Frx]=\frac{1}{\rho}div(b_1.\vec{\tau})_x-\frac{1}{\rho}.(\vec{\tau}.\vec{n})_x$$

Tóm lại, sau khi tích phân các số hạng của phương trình (15), ta có:

$$T[\mathrm{MEx}]:\ \alpha_{1tx}\frac{\partial}{\partial t}(\bar{u}_1.b_1)+\beta_{1x}\frac{\partial}{\partial x}(\overline{uu}.b_1)+\delta_{1x}\frac{\partial}{\partial z}(\overline{u\mathrm{w}}.b_1)=$$

$$\frac{1}{\rho}.F_x.b_1+\frac{1}{\rho}.\frac{\partial p}{\partial x}.b_1+\frac{1}{\rho}div(b_1.\vec{\tau})_x-\frac{1}{\rho}.(\vec{\tau}.\vec{n})_x \qquad (16)$$

Trong đó, các hệ số hiệu chỉnh như sau:

$$\alpha_{1tx}=\frac{1}{\frac{\partial}{\partial t}(\bar{u}_1.b_1)}.\int_{Y_1}^{Y_m}\frac{\partial u}{\partial t}dy\ ;\ \alpha_{2tx}=\frac{1}{\bar{u}_1.\frac{\partial b_1}{\partial t}}.\int_{Y_1}^{Y_m}u.\frac{\partial}{\partial t}(dy)$$

$$\beta_{1x}=\frac{1}{\frac{\partial}{\partial x}(b_1.\overline{uu})}.\frac{\partial}{\partial x}\int_{Y_1}^{Y_m}(uu).dy\ ;\ \beta_{2x}=\frac{1}{(\overline{uu}).\frac{\partial}{\partial x}(b_1)}.\int_{Y_1}^{Y_m}(uu).\frac{\partial}{\partial x}(dy)$$

$$\delta_{1x}=\frac{1}{\frac{\partial}{\partial z}(b_1.\overline{u\mathrm{w}})}.\frac{\partial}{\partial z}\int_{Y_1}^{Y_m}(u\mathrm{w}).dy\ ;\ \delta_{2x}=\frac{1}{(\overline{u\mathrm{w}}).\frac{\partial}{\partial z}(b_1)}.\int_{Y_1}^{Y_m}(u\mathrm{w}).\frac{\partial}{\partial z}(dy) \qquad (17)$$

Phương trình (16) chính là phương trình chuyển động theo phương x của bài toán dòng chảy 2DV cổ điển.

***Tích phân phương trình chuyển động (2) lần thứ hai từ bờ sông phải A đến bờ sông trái B:***

$$T^2[\mathrm{MEx}]:\ \int_{y_1}^{y_2}\alpha_{1tx}\frac{\partial}{\partial t}(\bar{u}_1.b_1)dy+\int_{y_1}^{y_2}\beta_{1x}\frac{\partial}{\partial x}(\overline{uu}.b_1)dy$$

$$+\int_{y_1}^{y_2}\delta_{1x}\frac{\partial}{\partial z}(\overline{u\mathrm{w}}.b_1)dy=\int_{y_1}^{y_2}\frac{1}{\rho}.F_x.b_1+\int_{y_1}^{y_2}\frac{1}{\rho}.\frac{\partial p}{\partial x}.b_1dy \qquad (18)$$

$$+\int_{y_1}^{y_2}\frac{1}{\rho}div(b_1.\vec{\tau})_x dy-\int_{y_1}^{y_2}\frac{1}{\rho}.\tau_{xx}.\frac{\partial b_1}{\partial x}dy-\int_{y_1}^{y_2}\frac{1}{\rho}.\tau_{xz}.\frac{\partial b_1}{\partial z}dy$$

Đi tính tích phân từng số hạng:

$$T^2[\text{Ix}]= \int_{y_1}^{y_2} \alpha_{1tx} \frac{\partial}{\partial t}(\overline{u_1}.b_1)dy =$$

$$\frac{1}{2}\alpha_{1tx}.\frac{\partial}{\partial t}\left\{\bar{u}.(y_2^2-y_1^2)\right\} - \frac{1}{2}\alpha_{1tx}.\bar{u}.\left\{\frac{\partial}{\partial t}(y_2^2-y_1^2)\right\}$$

$$T^2[\text{Jx}]= \int_{y_1}^{y_2} \beta_{1x} \frac{\partial}{\partial x}(\overline{uu}.b_1)dy =$$

$$\frac{1}{2}\beta_{1x}\frac{\partial}{\partial x}\left\{(\overline{uu}).(y_2^2-y_1^2)\right\} - \frac{1}{2}\beta_{1x}(\overline{uu}).\frac{\partial}{\partial x}(y_2^2-y_1^2)$$

$$T^2[\text{Lx}]= \int_{y_1}^{y_2} \delta_{1x} \frac{\partial}{\partial z}(\overline{u\text{w}}.b_1)dy =$$

$$\frac{1}{2}\delta_{1x}\frac{\partial}{\partial z}\left\{(\overline{u\text{w}}).(y_2^2-y_1^2)\right\} - \frac{1}{2}\delta_{1x}(\overline{u\text{w}}).\frac{\partial}{\partial z}(y_2^2-y_1^2)$$

$$T^2[\text{Mx}]= \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{\rho}.F_x.b_1 dy = \frac{1}{2\rho}.F_x.(y_2^2-y_1^2)$$

$$T^2[\text{Nx}]= \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{\rho}.\frac{\partial p}{\partial x}.b_1 dy = \frac{1}{2\rho}.\frac{\partial p}{\partial x}.(y_2^2-y_1^2)$$

$$T^2[\text{Ox}]= \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{\rho} div(b_1.\vec{\tau})_x dy =$$

$$\frac{1}{2\rho}div(\overrightarrow{\tau_x}).(y_2^2-y_1^2) - \frac{1}{2\rho}.\tau_{xx}.\frac{\partial}{\partial x}(y_2^2-y_1^2)$$

$$T^2[\text{Px}]= -\int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{\rho}.\tau_{xx}.\frac{\partial(y_m-y_1)}{\partial x}dy - \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{\rho}.\tau_{xz}.\frac{\partial(y_m-y_1)}{\partial z}dy$$

$$T^2[\text{Px}]= -\frac{1}{2\rho}.\left[\tau_{xx}.\frac{\partial}{\partial x}(y_2-y_1) + \tau_{xz}.\frac{\partial}{\partial x}(y_2-y_1)\right](y_2+y_1) =$$

$$-\frac{1}{2\rho}(\vec{\tau}.\vec{n})_x.(y_2+y_1)$$

Tổng hợp các số hạng sau khi tích phân lần thứ hai, ta có phương trình chuyển động theo phương ox theo cách tiếp cận đối ngẫu:

$$\begin{aligned}
&T^2[\text{MEx}]: \frac{1}{2}.\alpha_{1tx}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\bar{u}.(y_2^2-y_1^2)\right\} - \frac{1}{2}\alpha_{1tx}.\bar{u}.\left\{\frac{\partial}{\partial t}(y_2^2-y_1^2)\right\} \\
&+\frac{1}{2}\beta_{1x}\frac{\partial}{\partial x}\left\{(\overline{uu}).(y_2^2-y_1^2)\right\} - \frac{1}{2}\beta_{1x}(\overline{uu}).\frac{\partial}{\partial x}(y_2^2-y_1^2) \\
&+\frac{1}{2}\delta_{1x}\frac{\partial}{\partial z}\left\{(\overline{u\text{w}}).(y_2^2-y_1^2)\right\} - \frac{1}{2}\delta_{1x}(\overline{u\text{w}}).\frac{\partial}{\partial z}(y_2^2-y_1^2) = \\
&\frac{1}{2\rho}.F_x.(y_2^2-y_1^2) - \frac{1}{2\rho}.\frac{\partial p}{\partial x}.(y_2^2-y_1^2) + \\
&\frac{1}{2\rho}div(\vec{\tau})_x.(y_2^2-y_1^2) - \frac{1}{2\rho}(\vec{\tau}.\vec{n})_x.(y_2+y_1)
\end{aligned} \tag{19}$$

Phương trình (3) triệt tiêu vì rằng với bài toán 2DV thì ta xem vận tốc v theo phương ngang trục oy là không đáng kể.

**2.3. Xây dựng phương trình động lượng 2DV trung bình theo cách tiếp cận đối ngẫu theo phương z**

***Tích phân phương trình (4) lần thứ nhất từ bờ sông phải A đến mặt phẳng thẳng đứng bất kỳ C nằm trong phạm vi bờ sông phải A và bờ sông trái B:***

$$\begin{aligned}
&T[\text{MEz}]: \int_{y_1}^{y_m}\left(\underbrace{\frac{\partial \text{w}}{\partial t}}_{I_z} + \underbrace{\frac{\partial(\text{w}.u)}{\partial x}}_{J_z} + \underbrace{\frac{\partial(\text{w}.v)}{\partial y}}_{K_z} + \underbrace{\frac{\partial(\text{w}.\text{w})}{\partial z}}_{Lz}\right).dy = \\
&\int_{y_1}^{y_m}\left(\underbrace{\frac{1}{\rho}.F_z}_{M_z} - \underbrace{\frac{1}{\rho}.\frac{\partial p}{\partial z}}_{N_z} + \underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}}_{F_{rz}}\right).dy
\end{aligned} \tag{20}$$

Ta đi tính tích phân từng số hạng:

$$T[\text{Iz}]= \int_{y_1}^{y_m}\left(\frac{\partial \text{w}}{\partial t}\right).dy = \alpha_{1tz}\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\text{w}_1}.b_1) - \alpha_{2tz}\overline{\text{w}_1}\left[\frac{\partial y_m}{\partial t} - \frac{\partial y_1}{\partial t}\right]$$

$$T[\text{Jz}]= \int_{y_1}^{y_m}\left(\frac{\partial(\text{w}u)}{\partial x}\right).dy = \frac{\partial}{\partial x}\int_{y_1}^{y_m}(\text{w}u).dy - \int_{y_1}^{y_m}(\text{w}u).\frac{\partial}{\partial x}(dy)$$

$$T[\text{Jz}]=\beta_{1z}\frac{\partial}{\partial x}(\overline{\text{w}u}.b_1) - \beta_{2z}(\overline{\text{w}u}).\frac{\partial}{\partial x}(y_m) + \beta_{2z}(\overline{\text{w}u}).\frac{\partial}{\partial x}(y_1)$$

$$T[\text{Kz}]=0$$

$$T[\text{Lz}]= \int_{y_1}^{y_m}\frac{\partial(\text{ww})}{\partial z}.dy = \frac{\partial}{\partial z}\int_{y_1}^{y_m}(\text{ww}).dy - \int_{y_1}^{y_m}(\text{ww}).\frac{\partial}{\partial z}(dy)$$

$$T[\text{Lz}]=\delta_{1z}\frac{\partial}{\partial z}(\overline{\text{ww}}.b_1) - \delta_{2z}(\overline{\text{ww}}).\frac{\partial}{\partial z}(y_m) + \delta_{2z}(\overline{\text{ww}}).\frac{\partial}{\partial z}(y_1)$$

$$T[\text{Mz}]= \int_{y_1}^{y_m}\frac{1}{\rho}.F_z.dy = \frac{1}{\rho}.F_z.(y_m-y_1) = \frac{1}{\rho}.F_z.b_1$$

$$T[\text{Nz}]= \int_{y_1}^{y_m}\frac{1}{\rho}.\frac{\partial p}{\partial z}.dy = \frac{1}{\rho}.\frac{\partial p}{\partial z}.b_1$$

$$T[Frz] = \int_{y_1}^{y_m}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right).dy$$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(b_1.\tau_{zx}) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}(b_1.\tau_{zz}) -$$

$$\frac{1}{\rho}\left[\tau_{zx}.\frac{\partial y_m}{\partial x} + \tau_{zz}.\frac{\partial y_m}{\partial z}\right] + \frac{1}{\rho}\left[\tau_{zx}.\frac{\partial y_1}{\partial x} + \tau_{zz}.\frac{\partial y_1}{\partial z}\right]$$

$$T[Frz] = \frac{1}{\rho}div(b_1.\vec{\tau})_z - \frac{1}{\rho}.(\vec{\tau}.\vec{n})_z$$

Tóm lại, sau khi tích phân các số hạng của phương trình (20), ta có:

$$T[\text{MEz}]:\ \alpha_{1tz}\frac{\partial}{\partial t}(\overline{w_1.b_1})+\beta_{1z}\frac{\partial}{\partial x}(\overline{wu.b_1})+\delta_{1z}\frac{\partial}{\partial z}(\overline{ww.b_1})$$

$$=\frac{1}{\rho}.F_z.b_1+\frac{1}{\rho}.\frac{\partial p}{\partial z}.b_1+\frac{1}{\rho}div(b_1.\vec{\tau})_z-\frac{1}{\rho}.(\vec{\tau}.\vec{n})_z \qquad (21)$$

Trong đó, các hệ số hiệu chỉnh như sau:

$$\alpha_{1tz}=\frac{1}{\frac{\partial}{\partial t}(\overline{w_1}.\overline{b_1})}.\int_{Y_1}^{Y_m}\frac{\partial w}{\partial t}dy;\ \alpha_{2tz}=\frac{1}{\overline{w_1}.\frac{\partial b_1}{\partial t}}.\int_{Y_1}^{Y_m}w.\frac{\partial}{\partial t}(dy)$$

$$\beta_{1z}=\frac{1}{\frac{\partial}{\partial x}(b_1.\overline{wu})}.\frac{\partial}{\partial x}\int_{Y_1}^{Y_m}(wu).dy;$$

$$\beta_{2z}=\frac{1}{(\overline{wu}).\frac{\partial}{\partial x}(b_1)}.\int_{Y_1}^{Y_m}(wu).\frac{\partial}{\partial x}(dy)$$

$$\delta_{1z}=\frac{1}{\frac{\partial}{\partial z}(b_1.\overline{ww})}.\frac{\partial}{\partial z}\int_{Y_1}^{Y_m}(ww).dy; \qquad (22)$$

$$\delta_{2z}=\frac{1}{(\overline{ww}).\frac{\partial}{\partial z}(b_1)}.\int_{Y_1}^{Y_m}(ww).\frac{\partial}{\partial z}(dy)$$

Phương trình (21) chính là phương trình chuyển động theo phương z của bài toán dòng chảy 2DV cổ điển.

***Tích phân phương trình (4) lần thứ hai từ bờ sông phải A đến bờ sông trái B:***

$$T^2[\text{MEz}]:\ \int_{y_1}^{y_2}\alpha_{1tz}\frac{\partial}{\partial t}(\overline{w_1}.b_1)dy+\int_{y_1}^{y_2}\beta_{1z}\frac{\partial}{\partial x}(\overline{wu}.b_1)dy$$

$$+\int_{y_1}^{y_2}\delta_{1z}\frac{\partial}{\partial z}(\overline{ww}.b_1)dy=\int_{y_1}^{y_2}\frac{1}{\rho}.F_z.b_1dy+\int_{y_1}^{y_2}\frac{1}{\rho}.\frac{\partial p}{\partial z}.b_1dy+ \qquad (23)$$

$$\int_{y_1}^{y_2}\frac{1}{\rho}div(b_1.\vec{\tau})_z dy-\int_{y_1}^{y_2}\frac{1}{\rho}.(\vec{\tau}.\vec{n})_z dy$$

Đi tính từng tích phân:

$$T^2[\text{Iz}]=\int_{y_1}^{y_2}\alpha_{1tz}\frac{\partial}{\partial t}(\overline{w_1}.b_1)dy=\frac{1}{2}\alpha_{1tz}.\frac{\partial}{\partial t}\left\{\overline{w}.(y_2^2-y_1^2)\right\}-$$

$$\frac{1}{2}\alpha_{1tz}.\overline{w}.\left\{\frac{\partial}{\partial t}(y_2^2-y_1^2)\right\}$$

$$T^2[\text{Jz}]=\int_{y_1}^{y_2}\beta_{1z}\frac{\partial}{\partial x}(\overline{wu}.b_1)dy=$$

$$\frac{1}{2}\beta_{1z}\frac{\partial}{\partial x}\left\{(\overline{wu}).(y_2^2-y_1^2)\right\}-\frac{1}{2}\beta_{1z}(\overline{wu}).\frac{\partial}{\partial x}(y_2^2-y_1^2)$$

$$T^2[\text{Lz}]=\int_{y_1}^{y_2}\delta_{1z}\frac{\partial}{\partial z}(\overline{ww}.b_1)dy=$$

$$\frac{1}{2}\delta_{1z}\frac{\partial}{\partial z}\left\{(\overline{ww}).(y_2^2-y_1^2)\right\}-$$

$$\frac{1}{2}\delta_{1z}(\overline{ww}).\frac{\partial}{\partial z}(y_2^2-y_1^2)$$

$$T^2[\text{Mz}]=\int_{y_1}^{y_2}\frac{1}{\rho}.F_z.b_1dy=\frac{1}{2\rho}.Fz.(y_2^2-y_1^2)$$

$$T^2[\text{Nz}]=\int_{y_1}^{y_2}\frac{1}{\rho}.\frac{\partial p}{\partial z}.b_1dy=\frac{1}{2\rho}.\frac{\partial p}{\partial z}.(y_2^2-y_1^2)$$

$$T^2[\text{Oz}]=\int_{y_1}^{y_2}\frac{1}{\rho}div(b_1.\vec{\tau})_z dy=\frac{1}{2\rho}div(\vec{\tau})_z.(y_2^2-y_1^2)$$

$$T^2[\text{Pz}]=-\int_{y_1}^{y_2}\frac{1}{\rho}.\tau_{zx}.\frac{\partial(y_m-y_1)}{\partial x}dy-\int_{y_1}^{y_2}\frac{1}{\rho}.\tau_{zz}.\frac{\partial(y_m-y_1)}{\partial z}dy$$

$$T^2[\text{Pz}]=-\frac{1}{2\rho}.\left[\tau_{zx}.\frac{\partial}{\partial x}(y_2-y_1)+\tau_{zz}.\frac{\partial}{\partial x}(y_2-y_1)\right](y_2+y_1)$$

$$T^2[\text{Pz}]=\frac{1}{2\rho}(\vec{\tau}.\vec{n})_x.(y_2+y_1)$$

Tổng hợp các số hạng sau khi tích phân lần thứ hai, ta có phương trình chuyển động theo phương oz theo cách tiếp cận đối ngẫu:

$$T^2[\text{MEz}]:\ \frac{1}{2}.\alpha_{1tz}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\overline{w}.(y_2^2-y_1^2)\right\}-\frac{1}{2}\alpha_{1tz}.\overline{w}.\left\{\frac{\partial}{\partial t}(y_2^2-y_1^2)\right\}$$

$$+\frac{1}{2}\beta_{1z}\frac{\partial}{\partial x}\left\{(\overline{wu}).(y_2^2-y_1^2)\right\}-\frac{1}{2}\beta_{1z}(\overline{wu}).\frac{\partial}{\partial x}(y_2^2-y_1^2)$$

$$+\frac{1}{2}\delta_{1z}\frac{\partial}{\partial z}\left\{(\overline{ww}).(y_2^2-y_1^2)\right\}-\frac{1}{2}\delta_{1z}(\overline{ww}).\frac{\partial}{\partial z}(y_2^2-y_1^2) \qquad (24)$$

$$=\frac{1}{2\rho}.F_z.(y_2^2-y_1^2)-\frac{1}{2\rho}.\frac{\partial p}{\partial z}.(y_2^2-y_1^2)+$$

$$\frac{1}{2\rho}div(\vec{\tau})_z.(y_2^2-y_1^2)-\frac{1}{2\rho}(\vec{\tau}.\vec{n})_z.(y_2+y_1)$$

Tóm lại, trong bài báo này đã xây dựng hệ phương trình 2DV mô tả dòng chảy hở hai chiều đứng theo cách tiếp cận đối ngẫu như sau:

$$\gamma_{1c}.\frac{\partial}{\partial t}\left(y_2^2-y_1^2\right)+\beta_{1c}\frac{\partial}{\partial x}\left[\overline{u}.\left(y_2^2-y_1^2\right)\right]+$$

$$\delta_{1c}\frac{\partial}{\partial z}\left[\overline{w}.\left(y_2^2-y_1^2\right)\right]=0$$

$$\alpha_{1tx}.\frac{\partial}{\partial t}\left\{\bar{u}.(y_2^2-y_1^2)\right\}-\alpha_{1tx}.\bar{u}.\left\{\frac{\partial}{\partial t}(y_2^2-y_1^2)\right\}+$$

$$\beta_{1x}\frac{\partial}{\partial x}\left\{(\overline{uu}).(y_2^2-y_1^2)\right\}-\beta_{1x}(\overline{uu}).\frac{\partial}{\partial x}(y_2^2-y_1^2)$$

$$+\delta_{1x}\frac{\partial}{\partial z}\left\{(\overline{uw}).(y_2^2-y_1^2)\right\}-\delta_{1x}(\overline{uw}).\frac{\partial}{\partial z}(y_2^2-y_1^2)=$$

$$\frac{1}{\rho}.F_x.(y_2^2-y_1^2)-\frac{1}{\rho}.\frac{\partial p}{\partial x}.(y_2^2-y_1^2)+$$

$$\frac{1}{\rho}div(\vec{\tau})_x.(y_2^2-y_1^2)-\frac{1}{\rho}(\vec{\tau}.\vec{n})_x.(y_2+y_1)$$

$$\alpha_{1tz}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\bar{w}.(y_2^2-y_1^2)\right\}-\alpha_{1tz}.\bar{w}.\left\{\frac{\partial}{\partial t}(y_2^2-y_1^2)\right\}+$$

$$\beta_{1z}\frac{\partial}{\partial x}\left\{(\overline{wu}).(y_2^2-y_1^2)\right\}-\beta_{1z}(\overline{wu}).\frac{\partial}{\partial x}(y_2^2-y_1^2)$$

$$+\delta_{1z}\frac{\partial}{\partial z}\left\{(\overline{ww}).(y_2^2-y_1^2)\right\}-\delta_{1z}(\overline{ww}).\frac{\partial}{\partial z}(y_2^2-y_1^2)= \quad (25a)$$

$$\frac{1}{\rho}.F_z.(y_2^2-y_1^2)-\frac{1}{\rho}.\frac{\partial p}{\partial z}.(y_2^2-y_1^2)+$$

$$\frac{1}{\rho}div(\vec{\tau})_z.(y_2^2-y_1^2)-\frac{1}{\rho}(\vec{\tau}.\vec{n})_z.(y_2+y_1)$$

Trong đó: $\bar{u}$, $\bar{w}$ là thành phần vận tốc tương ứng theo các phương ox, oz được lấy trung bình theo chiều rộng sông; $\vec{n}$ là vec tơ pháp tuyến mặt biên; $(\vec{\tau}.\vec{n})_x, (\vec{\tau}.\vec{n})_z$ là ma sát thành bên theo phương trục ox và oz tương ứng; ρ là trọng lượng riêng của nước; $\alpha_{1tx}$, $\alpha_{1tz}$, $\beta_{1x}$, $\beta_{1z}$, $\delta_{1x}$, $\delta_{1z}$ là các hệ số hiệu chỉnh gần bằng 1.

Trong trường hợp gốc tọa độ trục 0y được chọn trùng với điểm A (bờ sông phải), hệ phương trình (25) được viết lại như sau:

$$\beta_{1c}\frac{\partial}{\partial x}\left[\bar{u}.b^2\right]+\delta_{1c}\frac{\partial}{\partial z}\left[\bar{w}.b^2\right]+\gamma_{1c}.\frac{\partial}{\partial t}\left(b^2\right)=0$$

$$\alpha_{1tx}.\frac{\partial}{\partial t}\left\{\bar{u}.(b^2)\right\}-\alpha_{1tx}.\bar{u}.\left\{\frac{\partial}{\partial t}(b^2)\right\}+$$

$$\beta_{1x}\frac{\partial}{\partial x}\left\{(\overline{uu}).(b^2)\right\}-\beta_{1x}(\overline{uu}).\frac{\partial}{\partial x}(b^2)+$$

$$\delta_{1x}\frac{\partial}{\partial z}\left\{(\overline{uw}).(b^2)\right\}-\delta_{1x}(\overline{uw}).\frac{\partial}{\partial z}(b^2)=$$

$$\frac{1}{\rho}.F_x.(b^2)-\frac{1}{\rho}.\frac{\partial p}{\partial x}.(b^2)+\frac{1}{\rho}div(\vec{\tau})_x.(b^2)-\frac{1}{\rho}(\vec{\tau}.\vec{n})_x.(b)$$

$$\alpha_{1tz}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\bar{w}.(b^2)\right\}-\alpha_{1tz}.\bar{w}.\left\{\frac{\partial}{\partial t}(b^2)\right\}+$$

$$\beta_{1z}\frac{\partial}{\partial x}\left\{(\overline{wu}).(b^2)\right\}-\beta_{1z}(\overline{wu}).\frac{\partial}{\partial x}(b^2)+$$

$$\delta_{1z}\frac{\partial}{\partial z}\left\{(\overline{ww}).(b^2)\right\}-\delta_{1z}(\overline{ww}).\frac{\partial}{\partial z}(b^2)= \qquad (25b)$$

$$\frac{1}{\rho}.F_z.(b^2)-\frac{1}{\rho}.\frac{\partial p}{\partial z}.(b^2)+$$

$$\frac{1}{\rho}div(\vec{\tau})_z.(b^2)-\frac{1}{\rho}(\vec{\tau}.\vec{n})_z.(b)$$

***Nhận xét:*** Hệ phương trình (25a) và (25b) nhờ có các hệ số điều chỉnh $\alpha_i$, $\beta_i$ nên dễ dàng điều chỉnh kết quả tính toán sao cho sát với thực tế hơn. Khi chiều rộng sông b thay đổi ít theo thời gian và không gian (dọc sông 0x và chiều sâu 0z), thì từ hệ phương trình (25a) và (25b) ta nhận được hệ phương trình 2DV (26) như sau:

$$\beta_{1c}\frac{\partial}{\partial x}\left[\bar{u}.b^2\right]+\delta_{1c}\frac{\partial}{\partial z}\left[\bar{w}.\left(b^2\right)\right]=0$$

$$\alpha_{1tx}.\frac{\partial}{\partial t}\left\{\bar{u}.(b^2)\right\}+\beta_{1x}\frac{\partial}{\partial x}\left\{(\overline{uu}).(b^2)\right\}+$$

$$\delta_{1x}\frac{\partial}{\partial z}\left\{(\overline{uw}).(b^2)\right\}=\frac{1}{\rho}.F_x.(b^2)-\frac{1}{\rho}.\frac{\partial p}{\partial x}.(b^2)+$$

$$\frac{1}{\rho}div(\vec{\tau})_x.(b^2)-\frac{1}{\rho}(\vec{\tau}.\vec{n})_x.(b)$$

$$\alpha_{1tz}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\bar{w}.(b^2)\right\}+\beta_{1z}\frac{\partial}{\partial x}\left\{(\overline{wu}).(b^2)\right\}+$$

$$\delta_{1z}\frac{\partial}{\partial z}\left\{(\overline{ww}).(b^2)\right\}=\frac{1}{\rho}.F_z.(b^2)-\frac{1}{\rho}.\frac{\partial p}{\partial z}.(b^2)+$$

$$\frac{1}{\rho}div(\vec{\tau})_z.(b^2)-\frac{1}{\rho}(\vec{\tau}.\vec{n})_z.(b) \qquad (26)$$

Từ hệ phương trình (26) khi tuyến tính hóa theo chiều rộng lòng dẫn b, ta dễ dàng nhận được hệ phương trình dòng chảy 2DV thiết lập theo phương pháp cổ điển.

Từ phương trình hai chiều ngang thiết lập theo tiếp cận đối ngẫu (Tinh Ton That et al., 2019) phối hợp với phương trình (26) ta nhận được phương trình 1D thiết lập theo phương pháp đối ngẫu như sau:

$$\frac{\partial H^2}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\alpha_{1c}uH^2)+\frac{\partial}{\partial x}(\beta_{1c}ub^2)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1 \bar{u}.H^2)+\alpha_{1tx}.\frac{\partial}{\partial t}(\bar{u}.b^2)+\frac{\partial}{\partial x}(\alpha_2.u^2H^2)+\beta_{1x}\frac{\partial}{\partial x}(\overline{uu}.b^2)$$
$$=-gH^2\frac{\partial Z_s}{\partial x}-g.b^2\frac{\partial Z_s}{\partial x}+\frac{1}{\rho}div(\vec{\tau})_x.(H^2)$$
$$-\frac{1}{\rho}(\vec{\tau}.\vec{n})_x.(H)+\frac{1}{\rho}div(\vec{\tau})_x.(b^2)-\frac{1}{\rho}(\vec{\tau}.\vec{n})_x.(b) \qquad (27)$$

Viết lại hệ (27) theo biến lưu lượng Q và chiều cao mực nước $Z_s$ :

$$\frac{\partial(AH)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\alpha_{1c}HQ)+\frac{\partial}{\partial x}(\beta_{1c}bQ)=0$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1.HQ)+\alpha_{1tx}.\frac{\partial}{\partial t}(bQ)+\frac{\partial}{\partial x}(\alpha_2.\frac{HQ^2}{A})+\beta_{1x}.\frac{\partial}{\partial x}(Q^2)=$$
$$-gAH\frac{\partial Z_s}{\partial x}-g.Ab\frac{\partial Z_s}{\partial x}+\frac{1}{\rho}div(\vec{\tau})_x.(H^2)+\frac{1}{\rho}div(\vec{\tau})_x.(b^2)$$
$$-\frac{1}{\rho}(\vec{\tau}.\vec{n})_x.(H)-\frac{1}{\rho}(\vec{\tau}.\vec{n})_x.(b) \qquad (28)$$

Trong đó, các hệ số có thể lấy như sau:

$\alpha_1 \cong \alpha_{1tx}$; $\alpha_2 \cong \beta_{1x}$

Đơn giản hơn nữa, khi bỏ qua ảnh hưởng của chiều rộng b, ta nhận được hệ phương trình dòng chảy hở một chiều thiết lập theo phương pháp đối ngẫu:

$$\frac{\partial(AH)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\alpha_{1c}HQ)=0$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1.HQ)+\frac{\partial}{\partial x}(\alpha_2.\frac{HQ^2}{A})= \qquad (29)$$
$$-gAH\frac{\partial Z_s}{\partial x}+\nu.H\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}-gAHS_f$$

Trong đó:

A: diện tích mặt cắt ngang; H: độ sâu dòng chảy; Q: lượng dòng chảy; $Z_s$: cao trình mặt nước; $\nu$: hệ số ma sát nhớt chất lỏng; $S_f$ : độ dốc ma sát lòng dẫn.

Tuyến tính hóa (29) theo H, ta nhận được hệ phương trình một chiều cổ điển (NGUYEN The Hung, 1992; Weiming Wu, 2007).

## 3. KẾT LUẬN

Mô hình toán học dòng chảy hai chiều đứng trong lòng dẫn hở được xây dựng theo cách tiếp cận đối ngẫu (25), (26) tổng quát hơn so với mô hình toán học dòng chảy hai chiều đứng xây dựng theo phương pháp cổ điển. Mô hình xây dựng được ở đây cho phép mô tả tổng quát khi có biến hình lòng dẫn; mực nước và trường vận tốc trung bình hai chiều đứng thu được cũng chính xác hơn.

Từ hệ phương trình hai chiều ngang xây dựng theo tiếp cận đối ngẫu và hệ phương trình hai chiều đứng xây dựng theo tiếp cận đối ngẫu (26), ta nhận được hệ phương trình dòng chảy một chiều theo tiếp cận đối ngẫu (27), (28) và (29) tổng quát hơn hệ phương trình một chiều cổ điển.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO


[1] Nguyen Dong Anh (2012), Dual approach to averaged values of functions, Vietnam Journal of Mechanics, VAST, Vol. 34, No. 3, pp. 211 – 214.

[2] Nguyen Dong Anh (2012), Dual approach to averaged values of functions: Advanced formulas, Vietnam Journal of Mechanics, Vast, Vol. 34, No. 4, pp. 321 – 325.

[3] NGUYEN, The Hung (1992), *Salinity intrusion in Huong river network and the measure of hydraulic construction*, The Journal of Science & Technology (Five University of Technology), No. 2, pp. 17-21.

[4] Hung, NGUYEN The (2017), A dual approach to modeling solute transport, The International Conference on Advances in Computational Mechanics, pp. 821-834.

[5] Tinh Ton That[1], The Hung Nguyen[1*], Dong Anh Nguyen[2], A dual approach for model construction of two-dimensional horizontal flow, *Proceedings of the 10th International Conference on Asian and Pacific Coasts (APAC 2019) Hanoi, Vietnam, Sept. 25-28, 2019, 115-120.*

[6] Hung, NGUYEN The (2020), A dual approach for modeling two- and one-dimensional solute transport, The International Conference on modern mechanics and applications, Lecture notes in Mechanical Engineering (Pp 978-981), *Springer*.

[7] Weiming Wu (2007), *Computation river dynamics*, Taylor and Francis / Balkema.